

Realiza cuatro preguntas de las ocho que se presentan

- P1)** Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que sea compatible:

$$\begin{cases} (a^2 - 1) x + a y + a^2 z = 1 \\ (a^2 - 1) x + (a + 1) y + (a^2 + a) z = 2 \\ y + (a^2 + 2a) z = a + 2 \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

(2.5 puntos)

- P2)** Demuestra que se cumple $|A \cdot B| = 0$ para toda matriz A de dimensión 3×2 , siendo B la siguiente matriz:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(2.5 puntos)

- P3)** Calcula la ecuación general del plano π perpendicular al plano $\alpha \equiv 2x - y - z - 1 = 0$, sabiendo que contiene al punto $P(-1, 2, 1)$ y que la intersección de ambos planos es paralela a la siguiente recta:

$$r \equiv \begin{cases} x + y - 2z - 3 = 0 \\ y - z - 3 = 0 \end{cases}$$

(2.5 puntos)

- P4)** Encuentra los puntos de la recta $r \equiv \begin{cases} 3x - y + z - 6 = 0 \\ x - y + 3z - 8 = 0 \end{cases}$ que son centro de una esfera de radio 3, tangente al plano $\pi \equiv 2x + 2y - z - 7 = 0$.

(2.5 puntos)

P5) Sea la función $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{4} \ln \frac{1}{x}\right)$.

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $\left[\frac{1}{e}, e\right]$.
(0.75 puntos)

b) Demuestra que existe un valor $\alpha \in \left(\frac{1}{e}, e\right)$ tal que $f'(\alpha) = \frac{e\sqrt{2}}{1-e^2}$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.
(1.75 puntos)

P6) Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x^2 + x - 1} \right)^{2x-1}$$

(1.25 puntos)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)^2}{\ln(x+1) - x}$$

(1.25 puntos)

P7) Sea la función $f(x) = \ln\left(\sin \frac{\pi x}{6} - \cos \frac{\pi x}{6}\right)$.

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[2, 4]$.
(1 punto)

b) Demuestra que existe un valor $\alpha \in (2, 4)$ tal que $f(\alpha) = 0$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.
(1.5 puntos)

P8) Calcula el área de la región del plano encerrada entre las gráficas de estas dos funciones:

$$f(x) = x^3 - 3x - 2 \quad \text{y} \quad g(x) = x - 2$$

(2.5 puntos)